Lineare Abbildungen eines Vektorraums auf einen Vektorraum

Teil 1:

21 große Beispiele

Datei Nr. 62101

Stand 4. August 2021

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

https://mathe-cd.de

DEMO

Vorwort

Vorausgesetzt werden Grundkenntnisse über Vektoren, lineare Abhängigkeit, Dimension und Basis. Diese kann man im Text 61101 nachlesen.

Hinweis: Der in 1.3 angesprochene Basiswechsel wird in 62150 ausführlicher behandelt. Die Berechnung und Bedeutung von Eigenvektoren (Abschnitt 2) ist Inhalt des Textes 62160

Inhalt

1 Abbildungen im $\mathbb{R}^2$

1.1 **Lineare Abbildung**, Definition 4

Beispiel 1 $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$ 6

Umkehrung einer linearen Abbildung / regu[illegible]bildun[illegible] 6

Kern einer Abbildung 7

1.2 **Erstellung einer Abbildungsmatrix aus eine[illegible]ord[illegible]q** 8

1.3 **Basiswechsel ist lineare A[illegible]** 10

Beispiel 2: $f([illegible] = \begin{pmatrix} x_1 + 2[illegible] \\ x_2 \end{pmatrix}$ 10

Wie führt man [illegible]n Basiswec[illegible]sel durch [illegible] (Siehe auch Text 62150) 11

Wie erstell[illegible]n eine Abbil[illegible]gsgleichung h[illegible]chtlich einer Basis B? 12

Beispiel 3 [illegible]$) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x[illegible] \end{pmatrix}$ 14

2 Einschub[illegible]genwe[illegible] Eigenvektoren (Siehe Text 62160)

Beispiel 4 $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}\vec{x}$ 15

3 [illegible]ildunge[illegible]n $\square^3$

Beispie[illegible] $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\vec{x}$ 17

Beispiel 6 $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$ 18

Wie sieht die Bildmenge einer nicht regulären Abbildung aus? 20

Beispiel 7 $f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$ (nicht regulär) 21

DEMO

Beispiel 8 $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$ 23

Beispiel 9 $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$ 25

4 Abbildungen im $\square^4$

Beispiel 10 $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$ 28

Beispiel 11 $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}$ 29

5 Lineare Abbildungen zwischen verschiedenen Vektorräumen

Beispiel 12 $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ $\square \to$ 31

Beispiel 13 $f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \cdot x_2\right)$ 33

Beispiel 14 $) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \cdot x_2)$ 33

Beispiel 15 $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} {}_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 34

Beispiel 16 $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ + x_2 \end{pmatrix}$ mit Basiswechsel 35

Beispiel 17 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$ mit Basiswechsel 37

Beispiel 18 $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \end{pmatrix}$ mit Basiswechsel 38

Beispiel 19 $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 4 & 4 \\ -4 & -8 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ 41

Beispiel 20 $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ 43

DEMO

1 Abbildungen im $\mathbb{R}^2$

1.1 Grundlage: Lineare Abbildung im $\mathbb{R}^2$

Es seien V und W zwei reelle Vektorräume und f eine Abbildung $V \to W$.

Dann heißt f ***linear***, wenn gilt:

(L1) $f(r\vec{u}) = r \cdot f(\vec{u})$ für alle $r \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{u} \in V$

(L2) $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

Hinweis. Man kann (L1) und (L2) zu einer Forderung zusam[illegible]sen:

$f(r\vec{u} + s\vec{v}) = r \cdot f(\vec{u}) + s \cdot f(\vec{v})$

Eine lineare Abbildung heißt auch **Homomorphismus**

Einführung im $\mathbb{R}^2$:

2

Es sei $E = \{\vec{e}_1 ; \vec{e}_1\}$ eine Basis der $\mathbb{R}^2$ und $B = \{\vec{a}$ [illegible] $_2$, [illegible]ne neu[illegible]is des $\mathbb{R}$[illegible]

Dann gilt für jeden Vektor $\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Verwendet man dieselben Koordin[illegible] x_2 als Koordi[illegible]ten für [illegible]neue Basis B,

dann ist die Zuordnung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \end{pmatrix}_E \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \end{pmatrix}$ e[illegible]nkt[illegible] bzw. Abbildung des $\mathbb{R}^2$ auf sich.

Zahlenbeispiel:

Gegeben seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}_E$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} [illegible] \end{pmatrix}_E$ und die linear[illegible]abhängigen Vektoren

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}$ [illegible] $\begin{pmatrix} -1 \\ [illegible] \end{pmatrix}$, die [illegible] Basis B des [illegible]bilden.

G[illegible]ben sei nun d[illegible]nktion $f(\vec{x}) = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$.

[illegible] ausführliche Darste[illegible]g ist $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \bar{x}_2 = x_1 + 4x_2 \end{Bmatrix}$

Oder in [illegible]ixschrei[illegible]se: $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Damit kann ma[illegible] das Bild von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}_E$ und von $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_E$ berechnen:

in Vektorform: $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

oder in Matrixform: $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ 2+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 22 \end{pmatrix}$.

DEMO

Die Eigenschaft der Linearität hilft uns beim Abbilden von Vektorsummen:

1. Möglichkeit: Man kann das **Bild einer Summe** $\vec{x}+\vec{y}$ auf zwei Arten berechnen:

(1) $$f(\vec{x}+\vec{y}) = f\left(\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-3\\5+12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{17}\end{pmatrix}$$

Oder so: (2) $$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x})+f(\vec{y}) = \begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\22\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{17}\end{pmatrix}$$

In (1) wurden die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zuerst addiert und dann die Summe abgebildet,

In (2) wurden die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zuerst abgebildet und dann die Bilder addiert.

Im Schema:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \xrightarrow{f} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$$

$$+ \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \xrightarrow{f} f(\vec{y}) = \begin{pmatrix}-3\\22\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \xrightarrow{f} \boxed{f(\vec{x}+\vec{y}) = \begin{pmatrix}2\\17\end{pmatrix} = f(\vec{x})+f(\vec{y})}$$

2. Möglichkeit: Man kann das **Bild eines Vielfachen** $\vec{r}\cdot\vec{x}$ auf zwei Arten berechnen:

(1) $$f(8\cdot\vec{x}) = f\left(8\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}24\\-16\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}24\\-16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24+16\\24-64\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{40}\\\mathbf{-40}\end{pmatrix}$$

Oder so: (2) $$f(8\cdot\vec{x}) = 8\cdot f(\vec{x}) = 8\cdot\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{40}\\\mathbf{-40}\end{pmatrix}$$

In (1) wurden die Vektoren zuerst mit 8 multipliziert und dann abgebildet,

In (2) wurde der Vektor zuerst abgebildet und dann mit 8 multipliziert.

Im Schema:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} \xrightarrow{f} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix} \quad \downarrow \cdot 8$$

$$8\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix}24\\-16\end{pmatrix} \xrightarrow{f} \boxed{f(8\cdot\vec{x}) = \begin{pmatrix}40\\-40\end{pmatrix} = 8\cdot f(\vec{x})}$$

Allgemeine Lösung

Zeige, dass die Abbildung $f(\vec{x}) = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$ eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Die Lösung dieser dargestellten Aufgabe ist die allgemeine Lösung des gezeigten Beispiels:

(1) Abbildung der Summe $\vec{x}+\vec{y}$:

$$\underbrace{f(\vec{x}+\vec{y}) = f\left(\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}\right) = (x_1+y_1)\cdot\vec{a}_1+(x_2+y_2)\cdot\vec{a}_2}_{\text{Abbildung der Summe}} = \underbrace{\underbrace{(x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2)}_{f(\vec{x})}+\underbrace{(y_1\vec{a}_1+y_2\vec{a}_2)}_{f(\vec{y})}}_{\text{Summe der Bilder}}$$

(2) Abbildung des r-fachen $r\cdot\vec{x}$:

$$\underbrace{f(r\cdot\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix}rx_1\\rx_2\end{pmatrix}\right) = rx_1\cdot\vec{a}_1+rx_2\cdot\vec{a}_2}_{\text{Bild des r-fachen}} = \underbrace{r\cdot(x_1\cdot\vec{a}_1+x_2\cdot\vec{a}_2) = r\cdot f(\vec{u})}_{\text{r-faches vom Bild}}$$

Damit sind die Linearitätseigenschaften nachgewiesen.

DEMO

Schreibweisen:

Die Vektorgleichung $\vec{y} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$ kann man als System von linearen Gleichungen

schreiben: $\begin{Bmatrix} y_1 = x_1a_{11} + x_2a_{12} \\ y_2 = x_1a_{21} + x_2a_{22} \end{Bmatrix}$ (1)

In Matrixform: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{y} = A\vec{x}$

Das System (1) erklärt auch, wie man die Matrizengleichung auszurechnen hat.

Beispiel 1: $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$ ist dasselbe wie $\begin{Bmatrix} y_1 = 2x_1 + 3x_2 \\ y_2 = -x_1 + x_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \vec{y} = x_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{a}_2}$

Abbildung von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$: $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3\cdot 5 \\ -1\cdot 2+1\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die **Standardbasis** ist $E = \left\{\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Bildvektoren der Basisvektoren: $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 0 \\ -1\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{a}_1$

$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 + 3\cdot 1 \\ -1\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{a}_2$

Merke: Die in der Abbildungsmatrix stehenden Spaltenvektoren sind die Bilder der Basisvektoren:

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

Eine Abbildung $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ bzw. $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ heißt **regulär**, wenn die Determinante der Abbildungsmatrix ungleich 0 ist.

Eine reguläre Abbildung kann man umkehren:

Zu Beispiel 1: Gegeben sei durch $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$ bzw. $\begin{Bmatrix} \bar{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 \\ \bar{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{Bmatrix}$

Oben haben wir berechnet: $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix}$

Dies wollen wir rückgängig machen, d.h. wir suchen den Vektor $\vec{x}$, für den gilt $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Methode: Eliminationsverfahren: $\begin{Bmatrix} 2x_1 + 3x_2 = 19 \\ -x_1 + x_2 = 3 \end{Bmatrix}$ $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Elimination von x_1 durch $(1) + 2\cdot(2)$: $5x_2 = 25 \Rightarrow x_2 = 5$

Einsetzen in (2): $-x_1 + 5 = 3 \Rightarrow x_1 = 2$

Ergebnis: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

DEMO

2. Methode: Umstellung der Matrixgleichung: $\boxed{\vec{y} = A \cdot \vec{x}}$ (3)

Allgemeine Lösungshinweise für diese Matrixgleichung.

Sehr ausführlich: Man multipliziert die Gleichung von links mit der inversen Matrix A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot \vec{y} = A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x})$$

Anwendung des Assoziativgesetzes rechts:

$$A^{-1} \cdot \vec{y} = (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{x}$$

Wegen $A^{-1} \cdot A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A^{-1} \cdot \vec{y} = E \cdot \vec{x}$$

Wegen $E \cdot \vec{x} = \vec{x}$:

$$\boxed{A^{-1} \cdot \vec{y} = \vec{x}} \qquad (4)$$

Mit ein wenig Routine wird man die Zwischenschritte weglassen und direkt nach (3) die Lösungsformel (4) anschreiben.

Hinweis: Weil die Multiplikation von Matrizen nicht kommutativ ist, muss man unbedingt von links multiplizieren. Details dazu findet man im Text 62101 Seite 27, im Text 62101 Seite 34 für die Berechnung der inversen Matrix Text 62010 Seite 2[illegible]

WISSEN: Die inverse Matrix zu einer 2x2-Matrix berechnet man [illegible] (Text 62010 S. 30)

Aus $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ folgt: $\frac{1}{d[illegible]} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & [illegible] \end{pmatrix}$ (5)

Nun die Lösung der Matrixgleichung $\begin{pmatrix} 2 & [illegible] \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix}$

Für die Berechnung der inversen Matrix von $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ benötigt man zuerst ihre Determinante:

$$d[illegible] = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 = 2 + 3 = 5$$

Damit folgt nach (5):

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Jetzt endlich der Lösungsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix}$$

d. h.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{5} - \frac{9}{5} \\ \frac{19}{5} + \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Für spätere Untersuchungen muss man noch lernen, was der **Kern einer Abbildung** sein soll.

Unter dem **Kern einer Abbildung** versteht man die Menge der Vektoren, deren Bild der Nullvektor ist: $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{x} \mid A \cdot \vec{x} = \vec{o}\}$

Wenn man die inverse Matrix schon hat, geht es damit am schnellsten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Hier ist also } \mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

DEMO

1.2 Erstellen einer Abbildungsmatrix aus einer Zuordnung

Oft sind Abbildungen als Zuordnungen gegeben. Daraus kann man eine Abbildungsmatrix bilden:

(a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$

Also ist: $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Beispiel: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 = 2 \cdot (-3) - 5 \cdot 2 = -16 \\ \bar{x}_2 = -(-3) + 2 \cdot 2 = 7 \end{Bmatrix} \Rightarrow f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -16 \\ 7 \end{pmatrix}$

oder mit der Matrix: $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \cdot \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$

Also ist: $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \\ \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \\ 2 & \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Beispiel: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 + & \\ 2 - & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ x_3 \end{pmatrix}}$

Also ist: $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overbrace{x \cdot \begin{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad A \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Bei... : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0 + 0 \\ 0 + 0 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

d) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Also ist: $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Beispiel: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 0 - 3 \\ 0 + 2 + 6 \\ 1 + 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

DEMO

e) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

Das Ergebnis ist eine reelle Zahl.

Zur Erzeugung einer Matrix sollte man das Ergebnis als Skalarprodukt deuten:

Also ist: $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(Die Matrix ist hier offenkundig nur eine Formsache. Hier wird sie kei[illegible]wenden ☺.

Beispiel: $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = 2 + 1 - 4 + 6 = 5$

f) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x[illegible] + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x[illegible] \\ x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [illegible] \\ x_2 \\ x_2 \\ [illegible] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [illegible] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix}$

also $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x[illegible] \begin{pmatrix} 1 \\ [illegible] \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ [illegible] \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} [illegible] \\ 1 \\ 1 \\ [illegible] \end{pmatrix} + [illegible] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} [illegible] & 0 & 0 & 0 \\ [illegible] & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Beisp[illegible] $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ [illegible] \\ [illegible] \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

g) ***Aufg[illegible]*** Für eine Ab[illegible]ung f gelte: $f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Warum i[illegible] nicht linear?

Lösung: Es ist [illegible] $\begin{pmatrix} [illegible] \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Wenn f linear ist, dann folgt: $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Das widerspricht aber der Angabe $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Also kann f nicht linear sein.

DEMO

h) Gegeben ist die lineare Abbildung f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 2x_2 - 4x_1 \end{pmatrix}$.

Bestimme Bild und Kern von f, ihre Dimension und eine Basis.

Lösung:

Es ist $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (2x_1 - x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Daher ist das Bild von f: $\text{Bild}(f) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$ mit der Dimension 1.

Da $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim(\text{Ker}(f)) = 1$

i) f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung mit folgenden Eigens[illegible]aften:

(1) $f(\vec{x}) \neq \vec{x}$ (2) $f(x) \neq -\vec{x}$ (3) $f(f(\vec{x}))$ [illegible].

Zeige: In $\mathbb{R}^2$ gibt es eine Basis $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ mit fo[illegible] Eigen[illegible]ft:

(4) $f(\vec{b}_1) = \vec{b}_1$ und (5) $f(\vec{b}_2) = -\vec{b}_2$.

Lösung:

Dazu wähle man einen Vekto[illegible] $\vec{x}_1 \in \mathbb{R}^2$ [illegible] defin[illegible]

[illegible] $= \vec{x}_1 + f(\vec{x}_1)$ un[illegible] $\vec{b}_2 = \vec{x}_1 - f(\vec{x}_1)$.

Hinweis: Wege[illegible] $(x) \neq -\vec{x}$ ist [illegible] $\vec{o}$, und we[illegible] $f(\vec{x}) \neq \vec{x}$ ist $\vec{b}_2 \neq \vec{o}$.

Berechnung der Bilder: [illegible] $) = f(\vec{x}_1 + f(\vec{x}$ [illegible] $f(\vec{x}_1) + \underbrace{f(f(\vec{x}_1))}_{\vec{x}_1} = \underbrace{f(x_1) + \vec{x}_1}_{\vec{b}_1} = \vec{b}_1$

$f(\vec{b}_2)$ [illegible] $f(\vec{x}_1)) = f(\vec{x}_1) - \underbrace{f(f(\vec{x}_1))}_{\vec{x}_1} = \underbrace{f(x_1) - \vec{x}_1}_{-\vec{b}_2} = -\vec{b}_2$

Be[illegible] dass $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}$[illegible]eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

A[illegible]nme:	$\vec{b}_1 = k \cdot \vec{b}_2$	(6)
Dann folgt:	$f(\vec{b}_1) = f(k \cdot \vec{b}_2) = k \cdot f(\vec{b}_2)$	
Das heißt aber	$\vec{b}_1 = k \cdot (-\vec{b}_2)$	(7)
(6) + (7):	$2\vec{b}_1 = \vec{o} \quad \Rightarrow \quad \vec{b}_1 = \vec{o}$.	

Das ist ein Widerspruch, also ist die Annahme falsch, also sind $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ linear unabhängig.

Ergebnis: $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ ist eine Basis von $\square^2$

DEMO

Zahlenbeispiel:

$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\vec{x}$ hat die Eigenschaft: $f(f(\vec{x})) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix} 4-3 & 6-6 \\ -2+2 & -3+4 \end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$.

Es sei $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dann ist $f(\vec{x}_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 \\ -1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Definition: $\vec{b}_1 = \vec{x}_1 + f(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

und $f(\vec{b}_1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-9 \\ -9+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{b}_1$

$\vec{b}_2 = \vec{x}_1 - f(\vec{x}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

und $f(\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 21 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix} = -\vec{b}_2$

Und da $\vec{b}_1 \neq k \cdot \vec{b}_2$ sind sie linear unabhängig und bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

DEMO

1.3 Basiswechsel im Vektorraum stellt eine lineare Abbildung dar

Große Hinführungsaufgabe

Gegeben sei eine Abbildung f des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^2$ auf sich mit der Standardbasis

$$E = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ durch } f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ bzgl. E.}$$

a) Nachweis, dass f eine lineare Abbildung ist:

(1) $f(r\vec{x}) = \begin{pmatrix} rx_1 + 2rx_2 \\ rx_2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = r \cdot f(\vec{x})$

(2) $f(\vec{x} + \vec{y}) = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) \\ (x_2 + y_2) \end{pmatrix}$

$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 + 2x_2 + \text{[illegible]} \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$

$\Big\}\ f(\vec{x} + \vec{y}) = \text{[illegible]} + f(\vec{y})$

b) Wir bestimmen die Abbildungsgleichung von f.

<u>Zerlegungsmethode:</u> $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \text{[illegible]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

<u>Basismethode:</u> Man berechnet [illegible] dvektoren [illegible] r Stand[illegible] basis:

$f(\text{[illegible]}) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \text{[illegible]} \end{pmatrix}$ und $f(\text{[illegible]}) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_E$

Weil f linear ist, gilt $f(\vec{x}) = f(x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2) = x_1 \cdot f(\vec{e}_1) + x_2 \cdot f(\vec{e}_2) = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

als Matrixgleichung. $f(\vec{x}\text{[illegible]}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_E$

(Der Index E sagt hier, dass d[illegible] dinaten sic h auf [illegible] Basis E beziehen!)

Die [illegible] lösung [illegible] ht darin, [illegible] s m[illegible] weiß, dass

[illegible] den Spalten de[illegible] bildung[illegible] ix die Bildvektoren der Basis stehen.

c) B[illegible] hne den **Kern der [illegible] bildung** f.

WISSE[illegible] Unter d[illegible] Kern einer Abbildung versteht man die Vektoren, die auf den [illegible] tor abgebildet werden, also Lösung der Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{o}$ sind.

Ansatz: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 1 \cdot x_2 = 0 & (1) \\ -x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 & (2) \end{cases}$

Aus (2) folgt: $x_1 = 0$. Setzt man das in (1) ein, erhält man $x_2 = 0$.

Der einzige Vektor, der also den Kern von f bildet, ist der Nullvektor $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Man schreibt das dann so auf: $\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

DEMO

d) Zeige, dass $B = \left\{ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_E ,\ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_E \right\}$ auch eine Basis von V ist,

WISSEN: Eine Menge von Vektoren bildet eine Basis eines Vektorraums wenn sie
(1) linear unabhängig sind und
(2) ihre Anzahl gleich der Dimension des Vektorraums ist.

Lösung: $\det\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2\right) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 2 \neq 0$, also sind $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ linear unabhängig.

Die Dimension von V ist 2, also bilden $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ eine Basis von V.

e) Wie lautet die Abbildungsgleichung von f, wenn man B als Ba zugrunde legt?

Einschub: Wie führt man einen Basiswechs durch?

Es sei $E = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E ,\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E \right\}$ die Stan is (kan he Basis)

und $B = \left\{ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_E ,\ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine neue Ba s im orraum $\mathbb{R}^2$.

*Die **Koordinaten eines Vektors** sin me oeffiz nten für die Basisvektoren:*

Daher bedeutet $\vec{x}_E = \begin{pmatrix} x \\ \end{pmatrix}_E = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ sichtlich asis E (1)

und $= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_B = y \quad y_2\vec{b}_2$ hinsi h der Basis B (2)

$\vec{x}_E$ und $\vec{x}_B$ sollen der or sein: $\vec{x}_E$.

Dann m in (2) die isvektoren die Basis E umrechnen:

$$\left[y_1\vec{b}_1 + y \right]_E = y_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_E + y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_B$$

Die Ma eichung: $\boxed{\vec{x}_E = \quad \vec{x}_B}$ regelt **die Transformation** $B \to E$.

Wir suchen j h die Berec ng von $\vec{x}_B$ aus $\vec{x}_E$.

Dazu muss man at eichung nach $\vec{x}_B$ umstellen. Das geschieht, indem man die Transformationsgleichung von links mit der inversen Matrix B^{-1} multipliziert. Dann entsteht:

$$B^{-1} \cdot \vec{x}_E = B^{-1} \cdot B \cdot \vec{x}_B = E \cdot \vec{x}_B = \vec{x}_B .$$

Für die Transformation $E \to B$ gilt also: $\boxed{\vec{x}_B = B^{-1} \cdot \vec{x}_E}$

WISSEN: Die inverse Matrix zu einer 2x2-Matrix berechnet man so: (Text 62010 S. 30)

Aus $\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ folgt } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

DEMO

Wie erstellt man eine Abbildungsgleichung hinsichtlich einer Basis B?

Ich zeige zuerst an einem Beispiel die Methode:

Gegeben sei $\vec{x}_B$ (also bzgl. der Basis B): $\vec{x}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_B$ d. h. $\vec{x} = 3 \cdot \vec{b}_1 + 1 \cdot \vec{b}_2$.

(1) Transformation in die Basis E: $\vec{x}_E = B \cdot \vec{x}_B = 3 \cdot \vec{b}_1 + 1 \cdot \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_E$

(2) Jetzt Abbildung durch f: $f(\vec{x}_E) = A \cdot \vec{x}_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_E \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}_E$

f hinsichtlich Basis B

(3) Transformation in die Basis B.

Dazu benötigt man $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$: $f(\vec{x}_B) = B^{-1} \cdot f(\vec{x}_E) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 14 \\ \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}_B$

Führt man dieselbe Rechnung allgemein durch, erhält man die Abbildungsmatrix v[illegible] bzgl. B:

Gegeben sei $\vec{x}_B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_B$

(1) Transformation in die Basis E: $\vec{x}_E = B \cdot \vec{x}_B$

(2) Jetzt Abbildung durch f: $f(\vec{x}_E) = A \cdot \vec{x}_E = A \cdot B$

(3) Transformation in die Basis B. $f(\vec{x}_B) = B^{-1} \cdot f(\vec{x}_E) = \underbrace{B^{-1} \cdot A}_{T} \cdot \vec{x}_B$

Ergebnis: Die Abbildung in B geschieht mit der transformierten Abbildungsmatrix T:

$$\boxed{T = B^{-1} \cdot A \cdot B}$$

Rechnen wir nach: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Abbildung in B: $f(\vec{x}_B) = T \cdot \vec{x}_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}_B$

<u>Rechenschema</u>

$\vec{x}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_B \xrightarrow{B \to E} \vec{x}_E = B \cdot \vec{x}_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_E$

f mit T ↓ ↓ f mit A

Bildvektoren: $f(\vec{x}_B) = T \cdot \vec{x}_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}_B \underset{E \to B}{\overset{B \to E}{\rightleftarrows}}$

$f(\vec{x}_E) = A \cdot \vec{x}_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_E \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}_E$

$f(\vec{x}_E) = B \cdot f(x_B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}_E$

Beispiel nächste Seite.

DEMO

Man kann das kontrollieren:

Erinnern Sie sich, dass die Abbildungsmatrix A die Bilder der Basisvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ enthält?

Das ist hier mit der Matrix T genauso. Berechnet man die Bilder von $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ in E:

$f(\vec{b}_1) = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}_E$ und $f(\vec{b}_2) = f\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_E$ und transformiert diese wieder zurück nach B,

dann erhält man $f(\vec{b}_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}_B$ und $f(\vec{b}_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_B$.

Und genau diese beiden Vektoren stehen in der Abbildungsmatrix T.

DEMO

Beispiel 3

Gegeben ist die Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\vec{x}_E) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}_E$ bzgl. $E = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Bestimme die Abbildungsgleichung von f.

Entweder so: $f(\vec{x}_E) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Oder durch Berechnung der Bildvektoren der Standardbasis:

$$f(\vec{e}_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E\right) = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_E \quad \text{und} \quad f(\vec{e}_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E\right) = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_E$$

Allgemein: $f(\vec{x}) = f(x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2) = x_1 \cdot f(\vec{e}_1) + x_2 \cdot f(\vec{e}_2) = x_1 \cdot$ [illegible] $+ x_2 \cdot$ [illegible]

Als Matrixgleichung: $f(\vec{x}_E) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}_E$

Kurzlösung: Man schreibt die Bildvektoren der Basisve[illegible]ren in die Matrix.

b) Zeige, dass $B = \left\{ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_E, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_E \right\}$ auch e[illegible] von V [illegible]

$$\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

Also sind $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ linear un[illegible]hängig [illegible]bilde[illegible] Bas[illegible] von V, weil V die Dimension 2 hat.

Wie lautet die Abbildung[illegible]chung von f, w[illegible] man B als [illegible]sis zugrunde legt?

Hier benötigt man d[illegible]echnung au[illegible]eispiel 1, d[illegible]an auf Seite 8 nachlesen kann:

Gegeben sei [illegible] $\vec{x}$ [illegible].

(1) Transformation in [illegible]asis E: [illegible]$_E = B \cdot \vec{x}_B$

(2) [illegible]tzt Abb[illegible] durch [illegible] $f(\vec{x}_E) = A \cdot \vec{x}_E = A \cdot B \cdot \vec{x}_B$

[illegible] Transformation [illegible]e Basis [illegible]. $f(\vec{x}_B) = B^{-1} \cdot f(\vec{x}_E) = \underbrace{B^{-1} \cdot A \cdot B}_{T} \cdot \vec{x}_B$

Erg[illegible]is: Die Abbildu[illegible]smatrix ist $\boxed{T = B^{-1} \cdot A \cdot B}$

Rechnung dazu: [illegible] $= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Abbildungsmatrix: $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

<u>Beispielvektor:</u> $\vec{x}_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}_B \xrightarrow{B \to E} \vec{x}_E = B \cdot \vec{x}_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}_E$

f mit T ↓ f mit A ↓

Bildvektoren: $f(x_B) = T \cdot \vec{x}_B = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -9 \end{pmatrix}_B \underset{E \to B}{\overset{B \to E}{\rightleftarrows}}$

$f(\vec{x}_E) = A \cdot \vec{x}_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}_E$

$f(\vec{x}_E) = B \cdot f(x_B) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}_E$

DEMO

Usw. auf CD …..

DEMO